Local well-posedness for the Maxwell-Schrodinger equation (On Nonlinear Wave and Dispersive Equations)

中村, 誠; 和田, 健志

数理解析研究所講究録 1355 巻 2004 年 99-106

Local well-posedness for the Maxwell-Schrödinger equation

中村誠 (Makoto NAKAMURA) 東北大学情報学研究科
和田健志 (Takeshi WADA) 大阪大学理学研究科

§1. 序論

1.1. Maxwell-Schrödinger 方程式. 本講では空間3次元における Maxwell-Schrödinger 方程式 (MS) の時間局所適切性について考察する. この方程式は非相対論的なミクロな荷電粒子とそれの作り出す電磁場との相互作用による時間発展を記述する方程式である. 即ち u を波動関数, $(\phi, \boldsymbol{A})$ を電磁ポテンシャルとすると

$$i\partial_t u = (\mathscr{H}(\boldsymbol{A}) + \phi)u, \tag{1.1}$$

$$-\Delta\phi - \partial_t \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \rho(u), \tag{1.2}$$

$$(\partial_t^2 - \Delta)\boldsymbol{A} + \nabla(\partial_t\phi + \operatorname{div} \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J}(u, \boldsymbol{A}). \tag{1.3}$$

ここで $(u, \phi, \boldsymbol{A}) : \boldsymbol{R}^{1+3} \to \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^3$, $\mathscr{H}(\boldsymbol{A}) = -(\nabla - i\boldsymbol{A})^2$, $\rho(u) = |u|^2$, $\boldsymbol{J}(u, \boldsymbol{A}) = 2\operatorname{Im}\bar{u}(\nabla - i\boldsymbol{A})u$ である.

MS にはゲージ不変性からくる解の自由度があり, このままでは適切性を論じるには都合が悪い. 実際 (u, ϕ, A) が MS の解であるとすると任意の $\lambda : \boldsymbol{R}^{1+3} \to \boldsymbol{R}$ に対して

$$(u', \phi', \boldsymbol{A}') = (\exp(i\lambda)u, \phi - \partial_t\lambda, \boldsymbol{A} + \nabla\lambda). \tag{1.4}$$

により定義される $(u', \phi', \boldsymbol{A}')$ もまた MS の解である. これは, 観測可能なのは (u, ϕ, A) 自身ではなく電場 $\boldsymbol{E} = -\nabla - \partial_t\boldsymbol{A}$, 磁場 $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$, 電荷密度 ρ, 電流密度 $\boldsymbol{J}$ 等であることに由来する. ゲージ同値な二つの解は物理的には同じ状態を表すので代表元の取り方を指定すれば上記の不定性を取り除けると考えられる. これがゲージ条件である. ゲージ条件には種々のものが知られているがその中でよく用いられるものの一つが Coulomb ゲージである. これは

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0 \tag{1.5}$$

とするものである. この条件下で (1.2), (1.3) はそれぞれ

$$-\Delta\phi = \rho(u), \quad (\partial_t^2 - \Delta)\boldsymbol{A} = P\boldsymbol{J}(u, \boldsymbol{A}) \tag{1.6}$$

となる. ここで $P = 1 - \nabla\operatorname{div}\Delta^{-1}$ はソレノイダルな部分空間への射影である. (1.6) の第1式は Newton ポテンシャルにより簡単に解け, MS は Coulomb ゲージの元で

$$i\partial_t u = (\mathscr{H}(\boldsymbol{A}) + \phi(u))u, \quad (\partial_t^2 - \Delta)\boldsymbol{A} = P\boldsymbol{J}(u, \boldsymbol{A}),$$

となる. 但し $\phi(u) = (-\Delta)^{-1}|u|^2$ である. これを **MS-C** と書くことにする. ゲージ条件 (1.5) はもし $\boldsymbol{A}(0)$ と $\partial_t\boldsymbol{A}(0)$ が (1.5) を満たすならば時間発展のもとで不変に保たれる. 勿論 ϕ に対しては初期条件は不要である. そこで初期条件

$$(u(0), \boldsymbol{A}(0), \partial_t\boldsymbol{A}(0)) = (u_0, \boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1) \in X^{s,\sigma} \tag{1.7}$$

を与えて **MS-C** の適切性を論ずることにする. ここで

$$X^{s,\sigma} = \{(u_0, \boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1) \in H^s \oplus H^\sigma \oplus H^{\sigma-1}; \operatorname{div} \boldsymbol{A}_0 = \operatorname{div} \boldsymbol{A}_1 = 0\}.$$

1.2. 主結果. 今回得られたのは次の定理である.

Theorem 1.1. $s \geq 5/3$ かつ $\max\{4/3, s-2, (2s-1)/4\} \leq \sigma \leq \min\{s+1, (5s-2)/3\}$ とする. 但し $(s, \sigma) \neq (5/2, 7/2), (7/2, 3/2)$. このとき任意の初期条件 $(u_0, \boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1) \in X^{s,\sigma}$ に対して **MS-C** は時間局所的に一意可解である.

Remark. (1) 詳しくいうと初期条件の大きさに依存した $T > 0$ が存在し, 解は $(u, \boldsymbol{A}, \partial_t \boldsymbol{A}) \in C([0, T]; X^{s,\sigma})$ なるクラスで一意に存在する. (2) 初期条件に対する解の連続依存性は汎弱収束の意味で成り立つ. さらに $\sigma \geq \max\{(s-1), (2s+1)/4\}$ かつ $(s, \sigma) \neq (5/2, 3/2)$ ならば強収束の意味で連続依存性が成り立つ.

ゲージ条件としては Coulomb ゲージと並んで Lorentz ゲージ

$$\partial_t \phi + \operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 \tag{1.8}$$

もよく知られている. このゲージのもとで **MS** は以下の形となる (**MS-L**) :

$$i\partial_t u = (\mathscr{H}(\boldsymbol{A}) + \phi)u, \quad (\partial_t^2 - \Delta)\phi = \rho(u), \quad (\partial_t^2 - \Delta)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}(u, \boldsymbol{A}).$$

今度は Maxwell 方程式の部分がいずれも双曲型になるため初期条件は

$$(u(0), \phi(0), \partial_t \phi(0), \boldsymbol{A}(0), \partial_t \boldsymbol{A}(0)) = (u_0, \phi_0, \phi_1, \boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1) \in Y^{s,\sigma} \tag{1.9}$$

の様にあたえる. ここで

$$\begin{aligned} Y^{s,\sigma} = \{&(u_0, \phi_0, \phi_1, \boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1) \in H^s \oplus H^\sigma \oplus H^{\sigma-1} \oplus H^\sigma \oplus H^{\sigma-1}; \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{A}_0 + \phi_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{A}_1 + \Delta\phi_0 + |u_0|^2 = 0\}. \end{aligned}$$

ゲージ条件 (1.8) は初期条件が $Y^{s,\sigma}$ に属すれば時間発展に関して保存される. **MS-L** に関する結果は次の通りである.

Theorem 1.2. $s \geq 5/3$ かつ $\max\{4/3, s-1\} \leq \sigma \leq \min\{s+1, (5s-2)/3\}$ とする. ただし $(s, \sigma) \neq (5/2, 7/2)$ とする. このとき任意の初期条件 $(u_0, \phi_0, \phi_1, \boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1) \in Y^{s,\sigma}$ に対して **MS-L** は一意可解である.

Remark. (1) 解を考える空間は $(u, \phi, \partial_t \phi, \boldsymbol{A}, \partial_t \boldsymbol{A}) \in C([0, T]; Y^{s,\sigma})$. (2) 初期条件に対する解の連続依存性は汎弱収束の意味で成り立つ. さらに $\sigma \geq (2s+1)/4$ かつ $(s, \sigma) \neq (5/2, 3/2)$ ならば強収束の意味で連続依存性が成り立つ.

1.3. 既存の結果との比較. 適切性に関する先行する結果としては Nakamitsu-Tsutsumi [4] がある. この論文において彼らは $Y^{s,s}$ $(s > 5/2)$ において **MS-L** の時間局所適切性を証明している. 全く同様にして **MS-C** が $X^{s,s}$ $(s > 5/2)$ において時間局所適切であることも証明できる. **MS** の解析においてもっとも扱いにくいのは Schrödinger 方程式に現れる $2i\boldsymbol{A}\nabla u$ という項で, ここからいわゆる derivative loss を生じないようにする必要がある. 従って Strichartz 評価を用いた縮小写像の方法をそのまま適用することはできない. 彼らの方法は標準的なエネルギー法によるもので $2\,\mathrm{Re}\langle \boldsymbol{A}\nabla\Omega^s u, \Omega^s u\rangle = -\int |\Omega^s u|^2 \operatorname{div} \boldsymbol{A} dx$ により $s+1$ 階微分が現れないことを利用している. ここで $\Omega = (1-\Delta)^{1/2}$ である. これを用いれば

$$d\|u; H^s\|/dt \lesssim \|\boldsymbol{A}; H^s\|\|\partial u\|_\infty + \|\partial \boldsymbol{A}\|_\infty \|u; H^s\| \lesssim \|\boldsymbol{A}; H^s\|\|u; H^s\|$$

を得る. 仮定 $s > 5/2$ は $\|\partial u\|_\infty$ 及び $\|\partial \boldsymbol{A}\|_\infty$ を Sobolev の不等式で処理するために用いられている. ところで **MS** においてはエネルギー

$$\mathscr{E} = \|\nabla\phi + \partial_t \boldsymbol{A}\|_2^2 + \|\operatorname{rot} \boldsymbol{A}\|_2^2 + 2\|(\nabla - i\boldsymbol{A})u\|_2^2$$

は時間発展に際して保存されるので, 例えば **MS-C** の場合 $X^{1,1}$ に初期条件を与えてこの空間で解くのがもっとも自然である. Guo-Nakamitsu-Strauss [2] は compactness method により $X^{1,1}$ における時間大域解の存在を示した. しかしながら解の一意性は証明できていない. 今回の結果は既知の結果における解の存在と一意性のための十分条件のギャップをある程度埋める物となっている.

§2. 証明の概略

ここでは証明の概略を述べる. 詳しくは Nakamura-Wada [5] を参照されたい. 定理 1.1 が証明できれば定理 1.2 はゲージ変換により証明できるので以下では定理 1.1 についてのみ記述する. また, 以下の記述においては $s \le 2$ の場合を扱い, $s > 2$ の場合の証明はあとで簡単に触れる. なおこれより先常に $I = [0, T]$ とする.

まず **MS-C** を次のように線形化する.

$$i\partial_t v = (\mathscr{H}(\boldsymbol{A}) + \phi(u))v, \qquad v(0) = u_0, \tag{2.1}$$

$$(\partial_t^2 - \Delta + 1)\boldsymbol{B} = PJ(u, \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}, \quad B(0) = \boldsymbol{A}_0, \partial_t \boldsymbol{B}(0) = \boldsymbol{A}_1. \tag{2.2}$$

写像 $\Phi : (u, \boldsymbol{A}) \mapsto (v, \boldsymbol{B})$ の不動点が **MS-C** の解を与えるのでそれを縮小写像の原理により探す. Maxwell 方程式の部分を Klein-Gordon 方程式の如く線形化したのは波動方程式よりもこちらの方が非斉次 Sobolev 空間との相性がよいためである.

2.1. Schrödinger 方程式に対する評価. まず最初に次の補題を用意しておく.

Lemma 2.1. 以下の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\|(\nabla - i\boldsymbol{A})v; H^1\| &\lesssim \|v; H^2\| + \langle \|\boldsymbol{A}; H^1\|\rangle^4 \|u\|_2 \\ &\simeq \|\mathscr{H}(\boldsymbol{A})v\|_2 + \langle \|\boldsymbol{A}; H^1\|\rangle^4 \|u\|_2.\end{aligned}$$

Proof. 中辺と右辺の同値性のみ示す. Hölder, Sobolev の不等式により

$$\|\boldsymbol{A}\nabla v\|_2 \le \|\boldsymbol{A}\|_6\|\nabla v\|_3 \le C\|\boldsymbol{A}; H^1\|\|v; H^2\|^{3/4}\|v\|_2^{1/4} \le \varepsilon\|v; H^2\| + C\varepsilon^{-1}\|\boldsymbol{A}; H^1\|^4\|v\|_2.$$

ε は勿論小さな正数である. 同様に

$$\|\boldsymbol{A}^2 v\|_2 \le \varepsilon\|v; H^2\| + C\varepsilon^{-1}\|\boldsymbol{A}; H^1\|^4\|v\|_2.$$

これを用いれば同値性が証明できる. □

Remark. 上の補題を一般化してみれば分かるように $\|v; H^{s-2}\|$ は $\|\mathscr{H}(\boldsymbol{A})v\|$ とほぼ同値である.

これを用いて線形 Schrödinger 方程式

$$i\partial_t v = \mathscr{H}(\boldsymbol{A})v + \phi v \tag{2.3}$$

の解の H^s 評価を行う. ここで $\boldsymbol{A}$ は Coulomb ゲージ条件を満たし, $\phi = (-\Delta)^{-1}|u|^2$ である.

Lemma 2.2. $\boldsymbol{A} \in L^\infty(I; H^1)$, $\partial_t \boldsymbol{A} \in L^1(I; L^3)$, $u \in L^2(I; H^{3/4})$ とすると (2.3) の解 v は次の評価を満たす.

$$\begin{aligned}\|v(t); H^2\| &\le C(1 + \|\boldsymbol{A}; L^\infty(I; H^1)\|)^4\|v(0); H^2\| \\ &\quad \times \exp\bigl\{C\|\partial_t \boldsymbol{A}; L^1(I; L^3)\| + C\|u; L^2(I; H^{3/4})\|^2\bigr\}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Proof. 簡単のため $l = \|\boldsymbol{A}; L^\infty(I; H^1)\|$ とおく. $\mathscr{H}(\boldsymbol{A})$ の自己共役性を用いると直接計算により

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathscr{H}v\|_2^2 &= \mathrm{Im}\langle \mathscr{H}(\mathscr{H} + \phi)v + 2\partial_t \boldsymbol{A}(\nabla - i\boldsymbol{A})v, \mathscr{H}v\rangle \\ &\le \bigl\{\|\mathscr{H}\phi v\|_2 + 2\|\partial_t \boldsymbol{A}(\nabla - i\boldsymbol{A})v\|_2\bigr\}\|\mathscr{H}v\|_2.\end{aligned}$$

右辺に現れる量のうち, $\|\partial_t \boldsymbol{A}(\nabla - i\boldsymbol{A})v\|_2$ は Lemma 2.1 を用いて

$$\|\partial_t \boldsymbol{A}(\nabla - i\boldsymbol{A})v\|_2 \le \|\partial_t \boldsymbol{A}\|_3\|(\nabla - i\boldsymbol{A})v\|_6 \lesssim \|\partial_t \boldsymbol{A}\|_3\{\|\mathscr{H}v\|_2 + \langle l\rangle^4\|v\|_2\}.$$

の様に評価できる. また $\|\mathscr{H}\phi v\|_2$ は Lemma 2.1 と Sobolev の不等式により処理できて,

$$\|\mathscr{H}\phi v\|_2 \lesssim \|u; H^{3/4}\|^2\{\|\mathscr{H}v\|_2 + \langle l\rangle^4\|v\|_2\},$$

となる. L^2 ノルムの保存則 $\|v(t)\|_2 = \|v(0)\|_2$ を考慮すれば次の微分不等式を得る.

$$\frac{d}{dt}\{\|\mathscr{H}v\|_2 + \langle l\rangle^4\|v\|_2\} \le C\{\|u; H^{3/4}\|^2 + \|\partial_t \boldsymbol{A}\|_3\}\{\|\mathscr{H}v\|_2 + \langle l\rangle^4\|v\|_2\},$$

従って Gronwall の不等式により

$$\|\mathscr{H}v\|_2 \le \|\mathscr{H}v(0)\| \exp\bigl\{C\|\partial_t \boldsymbol{A}; L^1(I; L^3)\| + C\|u; L^2(I; H^{3/4})\|^2\bigr\}$$

を得る. 再び Lemma 2.1 を適用することにより求める評価が得られる. □

方程式 (2.3) に対する発展作用素を $\{U_{u,A}(t,\tau)\}$ とすると Lemma 2.2 の仮定のもとで

$$\begin{aligned}K_2 &\equiv \sup_{t,\tau\in I}\|U(t,\tau);H^2\to H^2\|\\&\le C\{1+\|\boldsymbol{A};L^\infty(I;H^1)\|\}^4\exp\{C\|u;L^2(I;H^{3/4})\|^2+C\|\partial_t\boldsymbol{A};L^1(I;L^3)\|\}\end{aligned}$$

である. また L^2 ノルムの保存則により $\|U(t,\tau);L^2\to L^2\|=1$ であるから補間により

$$K_s\equiv\|U(t,\tau);H^s\to H^s\|\le K_2^{s/2} \tag{2.5}$$

となる. さらに双対性により $-2\le s<0$ のとき $K_s\le K_2^{|s|/2}$ となる.

2.2. Maxwell 方程式に対する評価. Maxwell 方程式を取り扱うには Strichartz 評価 (例えば Brenner [1] を参照) を用いる. これを (2.2) に適用すると, $\sigma\ge 4/3$ の条件の下で

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{B};L^\infty(I;H^\sigma)\|\vee\|\partial_t\boldsymbol{B};L^6(I;L^3)\|\lesssim{}&\|(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1);H^\sigma\oplus H^{\sigma-1}\|\\&+\|\boldsymbol{A};L^1(I;H^{\sigma-1})\|+\|P\boldsymbol{J};L^{q'}(I;H_{r'}^{\sigma-2/r})\|.\end{aligned}$$

ここで $1/q+1/r=1/2$ かつ $2\le r<\infty$ (いわゆる admissible pair), プライムは共役指数を表す. 左辺の 2 番目の因子に関数空間 $L^6(I;L^3)$ が現れるが当然ながらこれは (2.4) に $\|\partial_t\boldsymbol{A};L^1(I;L^3)\|$ がでてくるのでこれを評価する必要があるからである. 定理の仮定における $\sigma\ge 4/3$ もここで必要となる. まず空間変数に関するノルムを評価する. 右辺第 2 項のうち扱いづらいのは $P(\bar{u}\nabla u)$ の項である. 基本的には Leibniz' rule と Sobolev の不等式による評価であるが, それだけでは $\sigma\le s$ という制限が付いてしまう (Klein-Gordon 方程式に対するエネルギー評価式を想起されたい). そこで射影作用素 P の存在に目をつけ以下のようにする. (簡単のため $m=\sigma-2/r$ と書く) $P\nabla=0$ を用いると Kato-Ponce の交換子評価 [3] により

$$\begin{aligned}\|P(\bar{u}\nabla u);H_{r'}^m\|&\equiv\|\Omega^m P(\bar{u}\nabla u)\|_{r'}\\&=\|P\{\Omega^m(\bar{u}\nabla u)-\bar{u}\Omega^m\nabla u-\Omega^m\bar{u}\nabla u\}\|_{r'}\\&\le\|P\{\Omega^m(\bar{u}\nabla u)-\bar{u}\Omega^m\nabla u\}\|_{r'}+\|P(\Omega^m\bar{u}\nabla u)\|_{r'}\\&\lesssim\|u;H_{p_1}^m\|\|u\|_{p_2}.\end{aligned}$$

但し $1/p_1+1/p_2=1/r'$ である. 右辺に Sobolev の不等式を適用すれば $\sigma\le\max\{s+1,(5s-2)/3\}$ かつ $(s,\sigma)\ne(5/2,7/2)$ ならば

$$\|P(\bar{u}\nabla u);H_{r'}^m\|\lesssim\|u;H^s\|^2$$

となる. 他の項はより簡単に評価できる. 時間変数に関しては Hölder の不等式で簡単に処理でき, 最終的に以下の Lemma を得る.

Lemma 2.3. $4/3 \le \sigma \le \min\{s+1, (5s-2)/3\}$ かつ $(s,\sigma) \ne (5/2, 7/2)$ ならば (2.2) の解 $\boldsymbol{B}$ に対して次の評価が成り立つ:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{B}; L^\infty(I;H^\sigma)\| &\vee \|\partial_t \boldsymbol{B}; L^6(I;L^3)\| \\ &\lesssim \|(\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1); H^\sigma \oplus H^{\sigma-1}\| + T\|\boldsymbol{A}; L^\infty(I;H^{\sigma-1})\| \\ &\quad + T^{1/2}(1 + \|\boldsymbol{A}; L^\infty(I;H^\sigma)\|)\|u; L^\infty(I;H^s)\|^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.3. 関数空間の設定. 上でみた評価を念頭に置いて, 次のように関数空間を設定する. 但し $s \le 2$ かつ $4/3 \le \sigma \le (5s-2)/3$ とする.

$$\begin{aligned}\mathscr{X}_{s,\sigma} = \Big\{ &(u, \boldsymbol{A}) \in L^\infty(I; H^s \oplus H^\sigma); \|u; L^\infty(I;H^s)\| \le l_{\mathrm{S}}, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0, \boldsymbol{A} \in W^{1,6}(I;L^3), \|\boldsymbol{A}; L^\infty(I;H^\sigma)\| \vee \|\partial_t \boldsymbol{A}; L^6(I;L^3)\| \le l_{\mathrm{M}} \Big\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Lemmas 2.2, 2.3 により, $(v, \boldsymbol{B}) = \Phi(u, \boldsymbol{A})$ は次の評価を満たす.

$$\|v; L^\infty(I;H^s)\| \le C(1+l_{\mathrm{M}})^{2s} \exp(CTl_{\mathrm{S}}^2 + CT^{5/6} l_{\mathrm{M}}) \|u_0; H^s\|,$$

$$\|\boldsymbol{B}; L^\infty(I;H^\sigma)\| \vee \|\partial_t \boldsymbol{B}; L^6(I;L^3)\| \le C\|(\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1); H^\sigma \oplus H^{\sigma-1}\| + CT^{1/2}(1 + l_S \vee l_M)^3.$$

そこで, 以下のように $l_{\mathrm{S}}, l_{\mathrm{M}}, T$ を選べば Φ は $\mathscr{X}_{s,\sigma}$ からそれ自身への写像となる. まず, $C\|(\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1); H^\sigma \oplus H^{\sigma-1}\| \le l_{\mathrm{M}}/2$ととる. 次に $C(1+l_{\mathrm{M}})^{2s}\|u_0; H^s\| \le l_{\mathrm{S}}/2$ となるように l_{S} をえらぶ. 最後に, $\exp(CTl_{\mathrm{S}}^2 + CT^{5/6} l_{\mathrm{M}}) \le 2$ かつ $CT^{1/2}(1 +_{\mathrm{S}} \vee l_{\mathrm{M}})^3 \le l_M/2$ となるように T を選ぶ.

縮小写像の原理を適用するためには $\mathscr{X}_{s,\sigma}$ に適当な距離を入れる必要がある. 解の差の評価においては Schrödinger 方程式から生ずる derivative loss を回避できないため, $\mathscr{X}_{s,\sigma}$ の定義にでてくるノルムそのものを距離として採用することはできない[1]. そこでノルム $\|u; L^\infty(I;L^2)\| \vee \|\boldsymbol{A}; L^4(I;L^4)\|$ から定まる距離 d を考える. すると $s \ge 7/4$ であれば $(v, \boldsymbol{B}) = \Phi(u, \boldsymbol{A})$, $(v', \boldsymbol{B}') = \Phi(u', \boldsymbol{A}')$ に対して

$$d(v, \boldsymbol{B}, v', \boldsymbol{B}') \le CT^{1/2} d(u, \boldsymbol{A}, u', \boldsymbol{A}')$$

が成り立つことが分かるので (Schrödinger 方程式に対してはエネルギー法, Maxwell 方程式に対しては Strichartz 評価を用いる) T を十分小さく取ればこの距離に関して写像 Φ は縮小写像となる.

$5/3 \le s < 7/4$ のときはもう一工夫必要である. ここでは記号が煩雑になるのをさけるため解の一意性を示すことにする. この場合はノルムとして

$$|\!|\!|(u, \boldsymbol{A})|\!|\!| \equiv \|u; L^\infty H^{s-1}\| \vee \|\boldsymbol{A}'; L^q H^{2-s,r} \cap L^2 L^\infty \cap L^\infty H^1\|$$

を採用する. ここで $(q, r) = (6/(2s-1), 3/(2-s))$. また $L^\infty H^{s-1}$ は $L^\infty(I; H^{s-1})$ の略記である. 他の空間についても同様. $(u, \boldsymbol{A}), (u', \boldsymbol{A}')$ を **MS-C** の二つの解とする.

[1]実際, Theorem 1.1 の仮定のうち $\sigma \ge 5/3$ は Φ が $\mathscr{X}_{s,\sigma}$ からそれ自身への写像となることの証明には用いていない. また, 同様の理由で解が初期条件に強連続に依存することを示すのにも工夫がいる.

$\|u-u';L^\infty H^{s-1}\|$ を評価する際に, 単純なエネルギー評価によらず, 代わりに $\partial_t(u-u')$ を H^{s-3} で評価し, これを方程式及び Lemma 2.1 から得られる評価

$$\|u-u';H^{s-1}\| \simeq \|\partial_t(u-u');H^{s-3}\| + \|u-u';L^2\|$$

と組み合わせる. u, u' の方程式をそれぞれ t で偏微分して差を取ると

$$\begin{aligned} i\partial_t^2(u-u') &= (\mathscr{H}+\phi)\partial_t(u-u') + (\mathscr{H}+\phi-\mathscr{H}'-\phi')\partial_t u' \\ &\quad + (2i\partial_t \boldsymbol{A}(\nabla - i\boldsymbol{A}) + \partial_t\phi)(u-u') \\ &\quad + (2i\partial_t\boldsymbol{A}(\nabla - i\boldsymbol{A}) + \partial_t\phi - 2i\partial_t\boldsymbol{A}'(\nabla - i\boldsymbol{A}') - \partial_t\phi')u' \\ &\equiv (\mathscr{H}+\phi)\partial_t(u-u') + \sum_{j=1}^{3} f_j. \end{aligned}$$

これを積分形に直すと

$$\partial_t(u-u') = -i\int_0^t U(t,\tau)\sum_{j=1}^{3} f_j(\tau)d\tau$$

となる. 従って $\|U(t,\tau);H^{s-3}\to H^{s-3}\| \le C$ により

$$\|u-u';L^\infty H^{s-1}\| \lesssim \int_0^t \sum_{j=1}^{3}\|f_j(\tau);H^{s-3}\|d\tau$$

である. 被積分関数のうち評価が難しいのは $\|f_1(\tau);H^{s-3}\|$, 特にそのうちの $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')\nabla\partial_t u'$ であるが, ここは双対性により評価する. 即ち ψ をテスト関数として

$$\begin{aligned} &|\langle(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')\nabla\partial_t v',\psi\rangle| \\ &\le \|\partial_t v';H^{s-2}\|\|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')\nabla\psi;H^{2-s}\| \\ &\lesssim \|\partial_t v';H^{s-2}\|\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}';H^{2-s,r}\cap L^\infty\|\|\psi;H^{3-s}\|. \end{aligned}$$

他の項は容易に処理できて

$$\|u-u';L^\infty H^{s-1}\| \lesssim T^{1/2}|||(u-u',\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')|||$$

を得る. Maxwell 方程式については通常の Strichartz 評価により[2]

$$\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}';L^q H^{2-s,r}\cap L^2L^\infty\cap L^\infty H^1\| \lesssim T^{1/2}|||(u-u',\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')|||$$

故に $|||(u-u',\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')||| \le CT^{1/2}|||(u-u',\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')|||$ となって T を十分小さく取れば一意性が従うことが分かる.

[2] L^2L^∞ については Strichartz 評価はそのままでは適用できないが L^∞ を適当な Sobolev 空間に埋め込んでから Strichartz 評価を使えばこの空間での評価は $L^qH^{2-s,r}$ での評価に比べて容易であることが分かる.

2.4. $s>2$ の場合. 解のアプリオリ評価について簡単に述べる. $(1+\|\boldsymbol{A};H^\sigma\|)^\alpha\|u\|_2$ なる項を加えることにより $\|v;H^s\|\simeq\|\partial_t v;H^{s-2}\|$ となることに目をつけて (2.1) を t で微分すると

$$i\partial_t^2 v=(\mathscr{H}+\phi)\partial_t v+(2i\partial_t\boldsymbol{A}(\nabla-i\boldsymbol{A})+\partial_t\phi)v$$

となる. 発展作用素 $U(t,\tau)$ を用いてこの方程式を積分形に直すと

$$\partial_t v=U(t,0)\partial_t v(0)-i\int_0^t U(t,\tau)(2i\partial_t\boldsymbol{A}(\nabla-i\boldsymbol{A})+\partial_t\phi)v(\tau)d\tau$$

$2<s\leq 4$ ならば (2.5) を用いて評価することにより,

$$\|\partial_t v;H^{s-2}\|\leq K_s\|\partial_t v(0);H^{s-2}\|+K_s\int_0^t\|2i\partial_t\boldsymbol{A}(\nabla-i\boldsymbol{A})+\partial_t\phi)v(\tau);H^{s-2}\|d\tau.$$

となる. これより

$$\begin{aligned}\|v(t);H^s\|\leq{}&C(\|u;L^\infty(I;H^s)\|,\|\boldsymbol{A};L^\infty(I;H^\sigma)\|)\\&\times\{\|v(0);H^s\|+\int_0^t(1+\|\partial_t\boldsymbol{A}(\tau);L^3\|)\|v(\tau)\|d\tau\}\end{aligned}$$

を得て, これに Gronwall の不等式を適用すれば必要な評価を得る. すると $s\leq 4$ に対して K_s が有限であることが分かり, 以下同じ手続きを繰り返して $\|v;H^s\|$ の評価を得る. 但し, 実際に Theorem 1.1 の仮定の下で必要な評価を得るには上の手続きだけでは不十分で, $\|\partial_t^2 v;H^{s-4}\|$ を上とほぼ同様の方法により評価する必要がある. Maxwell 方程式に対する評価は $s\leq 2$ の場合と同じである.

References

[1] P. Brenner, *On space-time means and everywhere defined scattering operators for nonlinear Klein-Gordon equations*, Math. Z., **186** (1984), 383–391.

[2] Y. Guo, K. Nakamitsu, W. Strauss, *Global finite-energy solutions of the Maxwell-Schrödinger system*, Comm. Math. Phys. **170** (1995), 181–196.

[3] T. Kato, G. Ponce, *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 891–907.

[4] K. Nakamitsu, M. Tsutsumi, *The Cauchy problem for the coupled Maxwell-Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **27** (1986), 211–216.

[5] M. Nakamura, T. Wada, *Local well-posedness for the Maxwell-Schrödinger equation*, preprint. http://arxiv.org/abs/math.AP/0304486